全品
SINCE 1992
教育图书 功能学具 学生之家
基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

考向追踪

答案之书

主　编　肖德好

破题有方，得分有道
从**解题思路**到**标准答案**
“答案之书”让你赢得明明白白

数学

长江出版传媒
崇文书局

答案之书 使用说明 数学 SHIYONGSHUOMING

本答案之书以《中国高考评价体系》的“一核四层四翼”为核心框架展开深度解析。在系统梳理高考考查逻辑与命题方向的基础上，聚焦“四层”考查内容，突出呈现必备知识、关键能力与学科素养。

一、必备知识：落实必备知识，基础一分不落

答案之书中重要知识和重要结论，源自教材或高中阶段总结的核心结论，要求学生重点背诵并熟练掌握，确保考前达到精准调用的程度。

示例 （1）来自教材的必备知识

重要结论 一、对数的运算法则

1. 运算法则：$a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$

(1) $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$

(2) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$

(3) $\log_aM^n=n\log_aM$

（2）高中阶段总结的必会结论

方法拓展 设 $f(x)$ 的周期为 T，对 $f(x)$ 的定义域内任一自变量的值 x，有如下结论：

(1)若 $f(x+a)=-f(x)(a\neq0)$，则 $T=2|a|$；

(2)若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}(a\neq0)$，则 $T=2|a|$；

二、关键能力：实践多维思考，追求方法突破，高效提能增分

针对不同层次学生的使用策略：

（1）基础薄弱　主攻：【标准解法】、【教材溯源】、【易错提醒】，确保中低档题目的【标准解法】烂熟于心，步骤分拿全。放弃偏难怪的【巧妙解法】

（2）中等水平　主攻：【一题多解】、【方法总结】、【重要结论】，提升解题速度和准确性；

（3）冲刺高分　主攻：【一题多解】中巧妙解法/快解、【知识本源】、【方法拓展】，追求最优解和最快解，深入研究难题的命题背景和思维链条，做到“知其然，更知其所以然”。

示例 （1）一题多解+教材溯源+易错提醒

15. 【答案】1

【精析】方法一　定义法

因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以对任意 x，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，即 $(-x)^3(a\cdot2^{-x}-2^x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$ 恒成立，即 $-(a\cdot2^{-x}-2^x)=a\cdot2^x-2^{-x}$ 恒成立，合并同类项得 $a(2^x+2^{-x})=2^x+2^{-x}$（此步很多学生被卡住，其实应该合并同类项），故 $a=1$.

方法二　特值法

因为函数 $f(x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$ 是偶函数，所以 $f(1)=f(-1)$，即 $(a\cdot2-2^{-1})=-(a\cdot2^{-1}-2)$，

合并同类项得 $a(2+2^{-1})=2+2^{-1}$，解得 $a=1$.

方法三　秒杀法

因为函数 $y_1=x^3$ 是奇函数，所以若函数 $f(x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$ 是偶函数，只要函数 $y_2=(a\cdot2^x-2^{-x})$ 是奇函数．由 $y=2^x-2^{-x}$ 是常见的奇函数，得 $a=1$.

课本溯源 2019 年人教 A 版《数学必修第一册》第 58 页第 5 题：若 $a,b>0$，且 $ab=a+b+3$，求 ab 的取值范围.

本题是一个典型的二元条件最值(范围)问题.

方法一：因为 $a,b>0$，且 $ab=a+b+3$，又 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，则 $ab\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，而 $ab>0$，解得 $ab\geqslant 9$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，故 ab 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

易错提醒 过点的切线与在点的切线

“在点的切线”已知切点，直接求导得斜率；“过点的切线”需先假设切点，通过方程求解切点坐标后再确定切线方程. 两者核心区别在于切点是否已知，解题方法也因此不同.

（2）一题多解+知识本源+方法拓展

知识本源 本题主要考查函数的定义——对应关系. 函数是指对于 A,B 两个非空数集，集合 A 中的任意一个数 x，按照某个确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应.

方法拓展 常见的奇偶函数：

常见奇函数有：$y=a^x-a^{-x}$，$y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$，$y=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$，$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$，$y=\log_a\dfrac{x-b}{x+b}$，$y=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$，$y=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$，$y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a^x+1}$，$y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a^x-1}$，$y=x^{2n+1}(n\in\mathbf{N})$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 等.

三、学科素养：构建知识网络，打通模块壁垒，成就理想高分

学科素养是高考评价体系中“四层”考查内容的核心落脚点，本答案之书严格依据《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》要求，将高中数学学科六大核心素养——数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析贯穿其中，引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界。

示例

方法拓展 本题表面看是单纯的函数递推问题，其实在递推与构造部分和斐波那契数列有关. 需要意识到，与本题问题有关的仅有 $f(3),f(4),\cdots$ 的取值，而在 $x>3$ 且 $x\notin\mathbf{N}^*$ 时，$f(x)$ 取值与本题问题毫无关系. 因此，在递推或者构造反例时，均可以不考虑在 $x>3$ 且 $x\notin\mathbf{N}^*$ 时 $f(x)$ 的取值.

(3)当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望小于或等于 1 时，这种微生物经过多代繁殖后临近灭绝，当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望大于 1 时，这种微生物经过多代繁殖后还有继续繁殖的可能.

特别说明

2022–2025年全国卷均参考官方答案，北京、天津、上海试卷已与本省老师核对，仅供参考。

考点 1 集合

1. [答案] C

[精析] 依题意得,集合 $B=\{0,1,2,3,4,8\}$,所以 $A\cap B=\{1,2,3,4\}$. 故选 C.

2. [答案] B

[精析] 由 $A\subseteq B$,可得 $0\in B$. 若 $a-2=0$,则 $a=2$,此时 $A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不满足 $A\subseteq B$;若 $2a-2=0$,则 $a=1$,此时 $A=\{0,-1\}$,$B=\{1,-1,0\}$,满足 $A\subseteq B$. 故选 B.

3. [答案] A

[精析] $\because P=\{1,2\}$,$Q=\{2,3\}$,$M=\{x\mid x\in P$ 且 $x\notin Q\}$,$\therefore M=\{1\}$. 故选 A.

4. [答案] A

[精析] 由已知可得 $M=\{2,4,5\}$,$2\in M$. 故选 A.

5. [答案] C

[精析] 易知 T 是 S 的真子集,所以 $S\cap T=T$,故选 C.

6. [答案] A

> 题眼 理解集合 M,N 的含义,其中集合 M 中的元素是比 3 的倍数大 1 的整数,集合 N 中的元素是比 3 的倍数大 2 的整数.

[精析] 因为整数集 $\mathbf{Z}=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$,$U=\mathbf{Z}$,所以 $\complement_U(M\cup N)=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$. 故选 A.

7. [答案] C

[精析] 由 $8-x\geqslant x$,得 $x\leqslant 4$,又 $x\in\mathbf{N}^*$,所以 $A\cap B$ 中有 $(1,7)$,$(2,6)$,$(3,5)$,$(4,4)$,共 4 个元素.

8. [答案] D

[精析] 因为 $M=\{x\mid 2x-1>5\}=\{x\mid x>3\}$,所以 $M\cap N=\varnothing$. 故选 D.

9. [答案] C

[精析] 因为 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{1,3,5\}$,所以 $\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$,共有 5 个元素. 故选 C.

10. [答案] D

[精析] $B=\{x\mid x(x-1)(x+1)=0\}=\{0,-1,1\}$,则 $A\cap B=\{0,1\}$.

11. [答案] B

[精析] 因为集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,3,4,5\}$,所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$,故选 B.

12. [答案] C

[精析] 由题意得 $M\cup N=\{x\mid -3<x<4\}$,故选 C.

13. [答案] B

[精析] $\because A=[-1,2)$,$B=\mathbf{Z}$,$\therefore A\cap B=\{-1,0,1\}$,故选 B.

14. [答案] B

[精析] $A\cap B=\{2,3\}$. 故选 B.

15. [答案] B

[精析] 因为 $N=\{x\mid 2x>7\}=\{x\mid x>3.5\}$,所以 $M\cap N=\{5,7,9\}$.

16. [答案] A

[精析] 易知 $0\in A$,$-1\in A$,$-3\notin A$,$2\notin A$,$3\notin A$,则 $A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 A.

17. [答案] A

[精析] 由已知得 $M\cap N=\{2,4\}$. 故选 A.

18. [答案] A

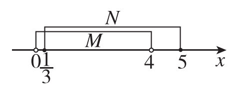
[精析] 由题意得,$M=\{x\mid x+2\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -2\}$,$N=\{x\mid x-1<0\}=\{x\mid x<1\}$,根据交集的运算可知,$M\cap N=\{x\mid -2\leqslant x<1\}$. 故选 A.

19. [答案] D

[精析] 由集合的交集运算知 $A\cap B=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$,故选 D.

20. [答案] B

[精析] 在数轴上表示集合 $M=\{x\mid 0<x<4\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$,如图,由图知 $M\cap N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x<4\right\}$,故选 B.



21. [答案] A

[精析] $A\cap B=\{-2,-1,0,1,2\}\cap\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x<\frac{5}{2}\right\}=\{0,1,2\}$,故选 A.

22. [答案] B

[精析] 因为集合 $A=\{-1,1,2,4\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$,故选 B.

23. [答案] B

[精析] 在数轴上表示出集合 A,B(图略),则 $A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$.

24. [答案] D

[精析] $\because U=\{x\mid -3<x<3\}$,$A=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$,$\therefore \complement_U A=\{x\mid -3<x\leqslant -2$ 或 $1<x<3\}$. 故选 D.

25. [答案] C

[精析] 由题意得$(A\cap B)\cup C=\{1\}\cup\{0,2,4\}=\{0,1,2,4\}$.

26. **[答案]** D

[精析] $\because$集合$M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}=\{x\mid 0\leqslant x<16\}$,集合$N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{3}\right\}$,$\therefore M\cap N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x<16\right\}$.故选D.

27. **[答案]** C

[精析] 因为$M=\{-2,-1,0,1,2\}$,$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant -2$或$x\geqslant 3\}$,所以$M\cap N=\{-2\}$.

28. **[答案]** D

[精析] 因为$A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x\mid\sqrt{x}\in A\}$,所以$B=\{1,4,9,16,25,81\}$,所以$A\cap B=\{1,4,9\}$,则$\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$,故选D.

29. **[答案]** A

[精析] 因为全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,集合$M=\{1,4\}$,所以$\complement_U M=\{2,3,5\}$,又$N=\{2,5\}$,所以$N\cup(\complement_U M)=\{2,3,5\}$.故选A.

30. **[答案]** A

[精析] $\because M=\{1,2\}$,$N=\{3,4\}$,$\therefore M\cup N=\{1,2,3,4\}$,又$U=\{1,2,3,4,5\}$,$\therefore\complement_U(M\cup N)=\{5\}$,故选A.

31. **[答案]** B

[精析] 由题意可得$\complement_U B=\{1,5,6\}$,则$A\cap(\complement_U B)=\{1,6\}$,故选B.

32. **[答案]** D

[精析] 由$A=\{1,3\}$,$B=\{2,3,5\}$,得$A\cup B=\{1,2,3,5\}$,又全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,所以$\complement_U(A\cup B)=\{4\}$.故选D.

33. **[答案]** A

[精析] $\because U=\{-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{-1,2\}$,$\therefore\complement_U B=\{-2,0,1\}$,又$A=\{0,1,2\}$,$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{0,1\}$.

34. **[答案]** A

[精析] $\because U=\{0,1,2,4,6,8\}$,$N=\{0,1,6\}$,$\therefore\complement_U N=\{2,4,8\}$,又$M=\{0,4,6\}$,$\therefore M\cup(\complement_U N)=\{0,2,4,6,8\}$.故选A.

35. **[答案]** D

[精析] 由题意,$B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$,$A=\{-1,2\}$,所以$A\cup B=\{-1,1,2,3\}$,所以$\complement_U(A\cup B)=\{-2,0\}$.故选D.

36. **[答案]** A

[精析] 由题意得$M\cup N=\{x\mid x<2\}$,所以$\{x\mid x\geqslant 2\}=\complement_U(M\cup N)$,故选A.

37. **[答案]** $\{-1,0\}$

[精析] 因为$A=\{x\mid 2x\leqslant 1\}=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$,$B=\{-1,0,1\}$,所以$A\cap B=\{-1,0\}$.

38. **[答案]** C

[精析] 设该中学的学生总数为m,喜欢足球的学生组成集合A,喜欢游泳的学生组成集合B,则$\text{card}(A)=60\%m$,$\text{card}(B)=82\%m$,$\text{card}(A\cup B)=96\%m$,所以$\text{card}(A\cap B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cup B)=46\%m$.故选C.

39. **[答案]** A

[精析] (1)当S中有3个元素时,设$S=\{a,b,c\}$$(a<b<c)$,则$ab,ac,bc\in T$,且$ab<ac<bc$,$\therefore\frac{b}{a},\frac{c}{a},\frac{c}{b}\in S$,在$\frac{b}{a},\frac{c}{a},\frac{c}{b}$中,显然$\frac{c}{a}$最大,则有两种情况:①当$\frac{c}{a}=c$时,$a=1$,若$\frac{c}{b}=a=1$,则$b=c$,与$b<c$相矛盾,$\therefore\frac{c}{b}=b$,则$c=b^2$,$\because b>1$,$\therefore$此时$S=\{1,b,b^2\}$,$T=\{b,b^2,b^3\}$,$\therefore S\cup T=\{1,b,b^2,b^3\}$,有4个元素,排除C;②当$\frac{c}{a}=b$时,$c=ab$,若$\frac{b}{a}=b$,则$a=1$,$b=c$,与$b<c$相矛盾,$\therefore\frac{b}{a}=a(a>1)$,则$b=a^2$,$c=a^3$,此时$S=\{a,a^2,a^3\}$,$T=\{a^3,a^4,a^5\}$,则$S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$,有5个元素,排除D.(2)当$S$中有4个元素时,由(1)分析可知:若设$S=\{1,b,b^2,b^3\}(b>1)$,可得到$T=\{b,b^2,b^3,b^4,b^5\}$,$\therefore S\cup T=\{1,b,b^2,b^3,b^4,b^5\}$,而又由$b^5\in T$,$b\in T$,得$b^4\in S$,与$b^4\notin S$相矛盾,排除B;若设$S=\{a,a^2,a^3,a^4\}$$(a>1)$,可得到$T=\{a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\}$,则$S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\}$,有7个元素.故选A.

[命题追踪] 集合是考查数学基础性问题的重要载体,具体命题时,一般通过简单的一元一次方程、不等式,一元二次方程、不等式和简单的指对数不等式来考查集合的运算,有时也会结合一维的数字或者二维的几何图形考查集合中的元素.学习时要重视方程思想,也要重视集合的含义,集合的含义是解决问题的基础.

考点2 常用逻辑用语

1. **[答案]** A

[精析] $x=0\Rightarrow\sin 2x=\sin 0=0$,故"$x=0$"是"$\sin 2x=0$"的充分条件;当$x=\pi$时,$\sin 2x=$

$\sin 2\pi=0$,可知 $\sin 2x=0 \not\Rightarrow x=0$,故“$x=0$”不是“$\sin 2x=0$”的必要条件. 综上可知,“$x=0$”是“$\sin 2x=0$”的充分不必要条件. 故选 A.

2. [答案] C

[精析] 当 $a^3=b^3$ 时,由幂函数的性质可知 $a=b$,所以 $3^a=3^b$,充分性成立;反之,当 $3^a=3^b$ 时,由指数函数的性质可知 $a=b$,所以 $a^3=b^3$,必要性成立. 故“$a^3=b^3$”是“$3^a=3^b$”的充要条件. 故选 C.

3. [答案] B

[精析] 由 $a^2=b^2$ 可得 $a=\pm b$,由 $a^2+b^2=2ab$ 可得 $a=b$,∴“$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的必要不充分条件.

4. [答案] A

[精析] 当 $a>6$ 时,$a^2>36$;当 $a^2>36$ 时,$a>6$ 或 $a<-6$. 故选 A.

5. [答案] C

[精析] 对于 A,当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $x\cdot(x+1)+2x=0$,解得 $x=0$ 或 $x=-3$,即必要性不成立,故 A 错误;对于 C,当 $x=0$ 时,$\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,2)$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即充分性成立,故 C 正确;对于 B,当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,$2(x+1)=x^2$,解得 $x=1\pm\sqrt{3}$,即必要性不成立,故 B 错误;对于 D,当 $x=-1+\sqrt{3}$ 时,不满足 $2(x+1)=x^2$,所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 不成立,即充分性不成立,故 D 错误. 故选 C.

6. [答案] B

[精析] 若 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,此时 $\boldsymbol{a}$ 不一定等于 $\boldsymbol{b}$,则充分性不成立;若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 显然成立,则必要性成立. 故“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的必要不充分条件,故选 B.

7. [答案] C

[精析] 方法一:因为 $xy\neq0$,且 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$,所以 $x^2+y^2=-2xy$,即 $x^2+y^2+2xy=0$,即 $(x+y)^2=0$,所以 $x+y=0$,所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

方法二:充分性:因为 $xy\neq0$,且 $x+y=0$,所以 $x=-y$,所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{-y}{y}+\frac{y}{-y}=-1-1=-2$,所以充分性成立;必要性:因为 $xy\neq0$,且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$,所以 $x^2+y^2=-2xy$,即 $x^2+y^2+2xy=0$,即 $(x+y)^2=0$,所以 $x+y=0$,所以必要性成立. 所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

方法三:充分性:因为 $xy\neq0$,且 $x+y=0$,所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{-2xy}{xy}=-2$,所以充分性成立;

必要性:因为 $xy\neq0$,且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$,所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=-2$,所以 $\frac{(x+y)^2}{xy}=0$,所以 $(x+y)^2=0$,所以 $x+y=0$,所以必要性成立. 所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件. 故选 C.

8. [答案] B

[精析] 由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$,得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,可知 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$ 等价于 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,可知必要性成立;若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,无法推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,例如 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$,可知充分性不成立. 综上所述,“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$”的必要不充分条件. 故选 B.

9. [答案] B

[精析] 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,$\beta=0$ 时,$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ 成立,但 $\sin\alpha+\cos\beta\neq0$,故 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ 推不出 $\sin\alpha+\cos\beta=0$;当 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 时,$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=(-\cos\beta)^2+\sin^2\beta=1$,即 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 能推出 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$. 综上可知,甲是乙的必要条件但不是充分条件. 故选 B.

10. [答案] A

[精析] 由函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增可以推出 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$,但由 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 不能确定 $f(x)$ 的单调性,故选 A.

11. [答案] C

[精析] 充分性:若 $\{a_n\}$ 为等差数列,则设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,可得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,则 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)}{2}d$,所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为首项为 a_1,公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列,即甲是乙的充分条件.

必要性:若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,可设 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为

m，则$\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)m$，故 $S_n=na_1+n(n-1)m$，利用公式 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\ S_n-S_{n-1},n\geqslant 2,\end{cases}$ 可得 $a_n=a_1+2(n-1)m$，所以 $a_{n+1}-a_n=2m$，即$\{a_n\}$为公差为 $2m$ 的等差数列，所以甲是乙的必要条件. 综上，甲是乙的充要条件. 故选 C.

12. **[答案]** B

[精析] 若 $q=1$，则 $S_n=na_1$，当 $a_1>0$ 时，$\{S_n\}$为递增数列，当 $a_1<0$ 时，$\{S_n\}$为递减数列，∴ 甲$\nRightarrow$乙. 若$\{S_n\}$为递增数列，则 $S_n-S_{n-1}=a_n=a_1q^{n-1}>0(n\geqslant 2)$，∴$a_1>0,q>0$，∴乙⇒甲. 故甲是乙的必要条件但不是充分条件，故选 B.

13. **[答案]** C

[精析] 若$\{a_n\}$为递增数列，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}>a_n$，公差 $d=a_{n+1}-a_n>0$，令 $a_n=a_1+(n-1)d>0$，解得 $n>1-\frac{a_1}{d}$，$\left[1-\frac{a_1}{d}\right]$表示不大于 $1-\frac{a_1}{d}$的最大整数，所以存在正整数 $N_0=\left[1-\frac{a_1}{d}\right]$，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，充分性成立；若存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，∵ $a_n=a_1+(n-1)d$，∴ $\forall n>N_0$，$n\in\mathbf{N}^*$，都有 $d>\frac{d-a_1}{n}$ 成立，∵ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d-a_1}{n}=0$，且 $d\neq 0$，∴$d>0$，∴ $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}-a_n=d>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，即$\{a_n\}$为递增数列，∴必要性成立. 综上，“$\{a_n\}$为递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$”的充要条件，故选 C.

14. **[答案]** C

[精析] 由题意知向量 $\overrightarrow{OP}_1,\overrightarrow{OP}_2,\overrightarrow{OP}_3$ 共面，即这三个向量不能构成空间的一个基底. 对于 A，由空间直角坐标系易知(0,0,0)，(1,0,0)，(0,0,1)三个向量共面，则当(0,0,0)，(1,0,0)$\in\Omega$ 时，无法推出(0,0,1)$\notin\Omega$，故 A 错误；对于 B，由空间直角坐标系易知(−1,0,0)，(1,0,0)，(0,0,1)三个向量共面，则当(−1,0,0)，(1,0,0)$\in\Omega$ 时，无法推出(0,0,1)$\notin\Omega$，故 B 错误；对于 C，由空间直角坐标系易知(1,0,0)，(0,0,1)，(0,1,0)三个向量不共面，可构成空间的一个基底，则由(1,0,0)，(0,1,0)$\in\Omega$ 能推出(0,0,1)$\notin\Omega$，故 C 正确；对于 D，由空间直角坐标系易知(1,0,0)，(0,0,1)，(0,0,−1)三个向量共面，则当(0,0,−1)，(1,0,0)$\in\Omega$ 时，无法推出(0,0,1)$\notin\Omega$，故 D 错误. 故选 C.

15. **[答案]** C

[精析] 存在量词命题的否定是全称量词命题，即把存在量词改为全称量词，并把结论给予否定，故选 C.

16. **[答案]** B

[精析] 当 $x=-\frac{1}{2}$时，$\left|-\frac{1}{2}+1\right|=\frac{1}{2}<1$，故 p 是假命题，则 $\neg p$ 是真命题；当 $x=1$ 时，$1^3=1$，故 q 是真命题，则 $\neg q$ 是假命题. 故选 B.

17. **[答案]** B

[精析] 当 $k=4$ 时，$(x-4)^2+(y-16)^2=16$，当 $k=5$ 时，$(x-5)^2+(y-25)^2=20$，两圆的根轴的方程为 $x+9y-187=0$，两圆的连心线所在直线的方程为 $9x-y-20=0$，联立方程组求得交点的纵坐标为$\frac{1663}{82}$，取直线 $l:y=\frac{1663}{82}$，圆心(k,k^2)到直线 l 的距离为 $\left|k^2-\frac{1663}{82}\right|$，当 $|k|\geqslant 5$ 时，$\left|k^2-\frac{1663}{82}\right|-\sqrt{4|k|}=k^2-\frac{1663}{82}-2\sqrt{|k|}=\left(|k|-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}+\frac{1663}{82}\right)+\frac{2\sqrt{5}\sqrt{|k|}}{5}(\sqrt{|k|}-\sqrt{5})>0$，当$|k|=0,1,2,3,4$ 时，$\left|k^2-\frac{1663}{82}\right|-\sqrt{4|k|}=\frac{1663}{82}-k^2-2\sqrt{|k|}>0$，∴ 直线 $l:y=\frac{1663}{82}$与它上、下方的所有圆都相离，故①成立；设任一直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$，圆心(k,k^2)到直线 l 的距离为$\frac{|Ak+Bk^2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，对于任意给定的实数 A,B,C $(A^2+B^2\neq 0)$，总能找到正整数 k_0，当$|k|>k_0$ 时，都有$\frac{|Ak+Bk^2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}>4\sqrt{|k|}$成立，即直线 l 只与有限个圆相交，与无数个圆相离，故②不成立. 故选 B.

18. **[答案]** B

[精析] 方法一　定性分析

∵椭圆是封闭的，∴总可以找到满足题意的 M 点，使得$|MP|\cdot|MQ|=1$ 成立，故①是真命题. 在双曲线 C 中，假设 C 为“自相关曲线”，显然 $M\notin C$，否则存在与点 M 重合的点 P，此时$|PM|=0$. 若$|PM|_{\max}\to+\infty$，而$|QM|_{\min}$ 是个固定值，则无法对任意的 $P\in C$，都存在 $Q\in C$，使得$|PM||QM|=1$，故②是假命题. 故选 B.

方法二　定理计算＋分析

首先确定 M 的位置(找到一个就行)，再证明“对

任意点 $P\in\Gamma$，都有 $Q\in\Gamma$，使得 $|MP|\cdot|MQ|=1$”.

若 M 在曲线上，则存在点 P 与 M 重合，此时 $|PM|=0$，故点 M 不在曲线上.

①对任意椭圆 T，不妨将椭圆方程化为标准形式：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设其左、右顶点分别为 A_1，A_2，取点 $M(m,0)$，其中 $m=\sqrt{a^2+1}$，设点 $P(x,y)$，则 $|PM|^2=(x-m)^2+y^2=(x-m)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{c^2}{a^2}x^2-2mx+m^2+b^2$，记 $f(x)=\frac{c^2}{a^2}x^2-2mx+m^2+b^2$，$x\in[-a,a]$.

$f(x)$图象的对称轴为直线 $x=\frac{ma^2}{c^2}$，且$\frac{ma^2}{c^2}>m>a$，所以 $f(x)$ 在$[-a,a]$上单调递减，所以 $|PM|_{\min}=|A_2M|=\sqrt{a^2+1}-a$，$|PM|_{\max}=|A_1M|=\sqrt{a^2+1}+a$，所以$|PM|\in[\sqrt{a^2+1}-a,\sqrt{a^2+1}+a]$. 因为$(\sqrt{a^2+1}-a)(\sqrt{a^2+1}+a)=1$，所以对于任意的 $P\in T$，都存在 $Q\in T$，使得$|PM|\cdot|QM|=1$，因此任意椭圆都是“自相关曲线”，①是真命题.

②对于某个给定的双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，假设其为“自相关曲线”，对于定点 $M\notin C$，$|PM|$必然存在最小值，不妨设最小值为 d，而双曲线上的点的横、纵坐标均可趋近于无穷大，因此$|PM|\in[d,+\infty)$.

若取$|PM|>\frac{1}{d}$，则$|QM|=\frac{1}{|PM|}<d$，矛盾，故假设不成立，因此不存在双曲线是“自相关曲线”，②是假命题. 故选 B.

［命题追踪］常用逻辑用语在新高考中几乎是必考考点，以充要条件、量词为载体，结合函数、数列、立体几何、平面向量等知识进行考查，更重视对学科重点概念和关系的考查. 要关注含量词命题的否定结构的标记和符号变化.

考点 3　不等式

1. **［答案］** C

［精析］ 由$\frac{x-4}{x-1}\geqslant2$，得$\frac{x-4}{x-1}-2\geqslant0$，即$\frac{-x-2}{x-1}\geqslant0$，可得$-(x+2)(x-1)\geqslant0$ 且 $x-1\neq0$，所以$-2\leqslant x<1$，故不等式$\frac{x-4}{x-1}\geqslant2$ 的解集为$\{x\mid-2\leqslant x<1\}$.

2. **［答案］** $(1,3)$

［精析］ 不等式$\frac{x-1}{x-3}<0$ 等价于$(x-1)(x-3)<0$，解得 $1<x<3$，所以不等式的解集是$(1,3)$.

3. **［答案］** $\{x\mid-1<x<3\}$

［精析］ $x^2-2x-3<0$ 可化为$(x-3)(x+1)<0$，解得$-1<x<3$，故不等式的解集为$\{x\mid-1<x<3\}$.

4. **［答案］** $(1,3)$

［精析］ 由$|x-2|<1$，可得$-1<x-2<1$，解得 $1<x<3$，故不等式的解集为$(1,3)$.

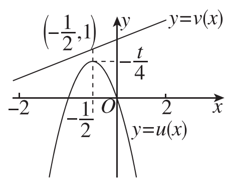
5. **［答案］** -4

［精析］ 方法一　必要性探路＋充分性证明

因为$(2a+b)x^2+bx-a-1\leqslant0$，所以$\left(x^2-\frac{1}{2}\right)2a+(x^2+x)b-1\leqslant0$①. 令 $x^2-\frac{1}{2}=x^2+x$，得 $x=-\frac{1}{2}$，代入①式，得$-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b\leqslant1$，得 $2a+b\geqslant-4$，故 $2a+b$ 的最小值为-4.

下证 $2a+b=-4$ 时符合题意：当 $2a+b=-4$ 时，$(2a+b)x^2+bx-a-1=-4x^2-(2a+4)x-a-1=-(2x+a+1)(2x+1)$，取 $a=0$，$b=-4$，上式$=-(2x+1)^2\leqslant0$，符合题意. 故$(2a+b)_{\min}=-4$.

方法二　分离函数＋数形结合



令 $t=2a+b$，则 $tx^2+(t-2a)x-a-1\leqslant0$，即 $tx^2+tx\leqslant2ax+a+1$，设 $u(x)=tx^2+tx$，$v(x)=2ax+a+1$，考虑 $t<0$，则 $y=v(x)$，$y=u(x)$的图象如图所示.

易知 $v(x)$的图象过定点$\left(-\frac{1}{2},1\right)$，若存在 $a\in\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in[-2,2]$，$u(x)\leqslant v(x)$，则$-\frac{t}{4}\leqslant1$，得 $t\geqslant-4$，故 $2a+b$ 的最小值为-4.

方法拓展 解决恒成立的双参数问题，一般用必要性分析法. 对于本题，利用 $2a+b$ 的特点，配成 $\lambda a+\mu b$ 的形式，使得系数比满足 $2:1$，求出 x 的值再求出 $2a+b$ 的最小值.

6. **［答案］** C

［精析］ 对于 A，当 $a=b$ 时，$a^2+b^2=2ab$，故 A 错误；对于 B，D，取 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，此时$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2+4=6<\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=8=\frac{1}{ab}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2+4=6>$

$\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}}}=4\sqrt{2}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$，故 B，D 错误；对于 C，由基本不等式可得 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}>\sqrt{ab}$，故 C 正确．故选 C．

7. 【答案】A

【精析】因为 $a>0,b>0$，所以 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，又 $a>b>0$，所以 $a+b>2\sqrt{ab}$，故 A 正确，B 错误；$\dfrac{a}{2}+2b\geqslant2\sqrt{\dfrac{a}{2}\times2b}=2\sqrt{ab}$，当且仅当 $\dfrac{a}{2}=2b$，即 $a=4b$ 时取等号，故 C，D 错误．故选 A．

8. 【答案】C

【精析】对于 A，$y=(x+1)^2+3\geqslant3$，最小值为 3，不符合条件；对于 B，令 $|\sin x|=t$，则 $t\in(0,1]$，$y=t+\dfrac{4}{t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，故 $y=t+\dfrac{4}{t}\geqslant1+\dfrac{4}{1}=5$，即 $y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$ 的最小值为 5，不符合条件；对于 C，$y=2^x+2^{2-x}\geqslant4$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，符合条件；对于 D，$y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$ 没有最小值，不符合条件．故选 C．

知识本源 题目以二次函数、三角函数、指数函数、对数函数求最值为表象，结合考查识别基本不等式结构，利用基本不等式解答．

9. 【答案】C

【精析】由题意，α,β,γ 都是锐角，则其三角函数值均为正数，所以 $0<\sin\alpha\cos\beta\leqslant\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}$①，当且仅当 $\sin\alpha=\cos\beta$ 时取等号，同理得 $0<\sin\beta\cos\gamma\leqslant\dfrac{\sin^2\beta+\cos^2\gamma}{2}$②，当且仅当 $\sin\beta=\cos\gamma$ 时取等号，$0<\sin\gamma\cos\alpha\leqslant\dfrac{\sin^2\gamma+\cos^2\alpha}{2}$③，当且仅当 $\sin\gamma=\cos\alpha$ 时取等号，由①+②+③得 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha<\dfrac{3}{2}$，故 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 三个值不可能都大于 $\dfrac{1}{2}$．当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6},\beta=\dfrac{\pi}{3},\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin\beta\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}>\dfrac{1}{2}$，$\sin\gamma\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}>\dfrac{1}{2}$，故大于 $\dfrac{1}{2}$ 的个数的最大值是 2，故选 C．

10. 【答案】A

【精析】方法一　特殊值法

令 $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3=10$，$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=6,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=2,\\y_3=8,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=5-\sqrt{5},\\y_2=5+\sqrt{5},\end{cases}$ 此时 $x_1+x_3=6$，$2x_2=10-2\sqrt{5}$，$x_1x_3=8$，$x_2^2=30-10\sqrt{5}$，$x_1+x_3>2x_2$，$x_1x_3>x_2^2$，故排除 B，D．再取 $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3=10$，$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=9,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=3,\\y_3=7,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=5-\sqrt{10},\\y_2=5+\sqrt{10},\end{cases}$ 此时 $x_1+x_3=4$，$2x_2=10-2\sqrt{10}$，$x_1x_3=3$，$x_2^2=35-10\sqrt{10}$，$x_1+x_3>2x_2$，$x_1x_3<x_2^2$，故排除 C．故选 A．

方法二　函数法

令 $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3=2a$，因为 $x_1<y_1$，$x_2<y_2$，$x_3<y_3$，所以 $x_1<a$，$x_2<a$，$x_3<a$，因为 $x_1y_1+x_3y_3=2x_2y_2$，所以 $x_1(2a-x_1)+x_3(2a-x_3)=2x_2(2a-x_2)$，设 $f(x)=x(2a-x)$，则上式等价于 $f(x_1)+f(x_3)=2f(x_2)$，$f(x)$ 的图象为开口向下的抛物线，必有 $f\left(\dfrac{x_1+x_3}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_3)}{2}=f(x_2)$，又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，所以 $x_2<\dfrac{x_1+x_3}{2}$，即 $2x_2<x_1+x_3$，故选 A．

方法三　基本不等式

设 $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3=2a$，则由 $x_1<y_1$，$x_2<y_2$，$x_3<y_3$，可得 $x_1<a$，$x_2<a$，$x_3<a$，由 $x_1y_1+x_3y_3=2x_2y_2$，可得 $x_1(2a-x_1)+x_3(2a-x_3)=2x_2(2a-x_2)$，则 $2x_2(2a-x_2)=2a(x_1+x_3)-x_1^2-x_3^2<2a(x_1+x_3)-\dfrac{(x_1+x_3)^2}{2}$，即 $8ax_2-4a(x_1+x_3)<4x_2^2-(x_1+x_3)^2$，即 $4a(2x_2-x_1-x_3)<(2x_2+x_1+x_3)(2x_2-x_1-x_3)$，即 $(4a-2x_2-x_1-x_3)(2x_2-x_1-x_3)<0$，又 $x_1<a$，$x_2<a$，$x_3<a$，所以 $4a-2x_2-x_1-x_3>0$，所以 $2x_2-x_1-x_3<0$，即 $2x_2<x_1+x_3$．

11. 【答案】ABD

【精析】对于 A，因为 $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，所以 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，因为 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，所以 $a-b=2a-1>-1$，所以 $2^{a-b}>2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，故 B

正确；对于 C，$\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)\leqslant\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\log_2\frac{1}{4}=-2$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 C 不正确；因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=1+2\sqrt{ab}\leqslant1+a+b=2$，所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 D 正确．故选 ABD．

12. **【答案】** BD

【精析】方法一　利用基本不等式

由 $x^2+y^2-xy=1$，得 $(x+y)^2-1=3xy\leqslant3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，当且仅当 $x=y=\pm1$ 时取等号，所以 $(x+y)^2\leqslant4$，即 $-2\leqslant x+y\leqslant2$，故 A 错误，B 正确；因为 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant x^2+y^2-1\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $\frac{2}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant2$，故 C 错误，D 正确．故选 BD．

方法二　三角换元，化归转化

由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=1$，令 $\begin{cases}x-\frac{y}{2}=\cos\theta,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta,\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta,\end{cases}$ 故 $x+y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,2]$，故 A 错误，B 正确；$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin2\theta-\frac{1}{3}\cos2\theta+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{3}\in\left[\frac{2}{3},2\right]$，故 C 错误，D 正确．故选 BD．

方法三　和差换元，利用椭圆的几何性质

令 $x=u+v$，$y=u-v$，由题设得 $u^2+3v^2=1$，由椭圆的几何意义知，$u\in[-1,1]$，$v\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，所以 $x+y=2u$ 的取值范围为 $[-2,2]$，$x^2+y^2=2(u^2+v^2)$ 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},2\right]$，故选项 B 和 D 正确，选项 A 和 C 错误．故选 BD．

方法四　权方和不等式

由权方和不等式及基本不等式得 $1=x^2+y^2-xy\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$，解得 $-2\leqslant x+y\leqslant2$，当且仅当 $x=y$ 时，取等号，故 A 错误，B 正确；同时，$1=x^2+y^2-xy\geqslant x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}$，故 $x^2+y^2\leqslant2$，当且仅当 $x=y$ 时，取等号，故 C 错误，D 正确．故选 BD．

课本溯源 人教 A 版必修第一册第 58 页第 5 题：若 $a,b>0$，且 $ab=a+b+3$，求 ab 的取值范围．

本题是一个典型的二元条件最值(范围)问题．

精解： 方法一：因为 $a,b>0$，且 $ab=a+b+3$，$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，所以 $ab\geqslant2\sqrt{ab}+3$，又 $ab>0$，所以 $ab\geqslant9$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，故 ab 的取值范围是 $[9,+\infty)$．

方法二：设 $a+b=t(t>0)$，则 $b=t-a$，代入 $ab=a+b+3$，化简得 $a^2-ta+t+3=0$，又 $a>0$，所以 $\begin{cases}t^2-4t-12\geqslant0,\\ t>0,\\ t+3>0,\end{cases}$ 解得 $t\geqslant6$，即 $ab=a+b+3\geqslant9$，故 ab 的取值范围是 $[9,+\infty)$．

13. **【答案】** 4

【精析】 方法一：易知 $b+\frac{1}{a}=\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+2\geqslant2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+2=4$，当且仅当 $ab=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时取等号．

方法二：由已知，令 $m=\frac{1}{b}$，可得 $a>0$，$m>0$，$a+m=1$，$b+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{m}=(a+m)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{m}\right)=2+\frac{m}{a}+\frac{a}{m}\geqslant2+2\sqrt{\frac{m}{a}\times\frac{a}{m}}=4$，当且仅当 $\frac{m}{a}=\frac{a}{m}$，即 $a=m=\frac{1}{2}$ 时，等号成立．

方法三(权方和不等式)：$b+\frac{1}{a}=\frac{1}{\frac{1}{b}}+\frac{1}{a}\geqslant\frac{(1+1)^2}{\frac{1}{b}+a}=4$，当且仅当 $a=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，所以 $b+\frac{1}{a}$ 的最小值为 4．

14. **【答案】** $2\sqrt{2}$

【精析】方法一　四元均值不等式

$\because\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$，$\therefore\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b=\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\geqslant4\sqrt[4]{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}=\frac{b}{2}$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时，等号

成立,则$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$的最小值为$2\sqrt{2}$.

方法二　多次用基本不等式,先让b静止,再让b运动

$\because a>0,b>0,\therefore \frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{b}\times b}=2\sqrt{2}$,当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$和$\frac{2}{b}=b$同时成立,即$a=b=\sqrt{2}$时,两等号同时成立.

[命题追踪] 不等式的解法与基本不等式在高考中较少单独考到,一般结合集合或其他知识作为工具考查.基本不等式的本质是结构的识别,因此对于基本不等式要重视对结构的本质把握和等价变形的多样性.

常用技巧 a,b,x,y均为正数.

1. 基本不等式链:$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;

2. 热点不等式:$ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$;

3. 权方和不等式:$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}$;

4. 均值不等式:$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

主题二　函数、导数及其应用

考点4　函数的概念及其表示

1. [答案] D

[精析] $y=10^{\lg x}=x$,定义域与值域均为$(0,+\infty)$,只有选项D满足题意.

2. [答案] A

[精析] 若函数$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$,则对任意$M\in\mathbf{R}$,一定存在$x_1\in D$,使得$f(x_1)=|M|+1$,取$x_0=x_1$,则$|f(x_0)|=|M|+1>M$,充分性成立;取$f(x)=2^x$,$D=\mathbf{R}$,则对任意$M\in\mathbf{R}$,一定存在$x_1\in D$,使得$f(x_1)=|M|+1$,取$x_0=x_1$,则$|f(x_0)|=|M|+1>M$,但此时函数$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$,必要性不成立.所以"函数$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$"是"对任意$M\in\mathbf{R}$,存在$x_0\in D$,使得$|f(x_0)|>M$"的充分不必要条件.故选A.

3. [答案] D

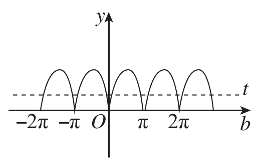
[精析] 对选项A中的函数,当$x=0$时,得$f(0)=0$,当$x=\frac{\pi}{2}$时,得$f(0)=1$,矛盾;选项B中的函数,当$x=0$时,得$f(0)=0$,当$x=\frac{\pi}{2}$时,得$f(0)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$,矛盾;选项C中的函数,当$x=-1$时,得$f(2)=0$,当$x=1$时,得$f(2)=2$,矛盾;选项D中的函数变形为$f((x+1)^2-1)=\sqrt{(x+1)^2-1+1}$,令$t=(x+1)^2-1$可知,$f(t)=\sqrt{t+1}$满足要求.

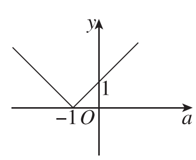
知识本源 本题主要考查函数的定义——对应关系.函数是指对于A,B两个非空数集,集合A中的任意一个数x,按照某个确定的对应关系f,在集合B中都有唯一确定的数y和它对应.

4. [答案] B

[精析] 方法一:实数a,b,t满足$|a+1|=t$,$|\sin b|=t$,$\therefore (a+1)^2=t^2$,$a^2+2a=t^2-1$,$\sin^2 b=t^2$,若t确定,则t^2,t^2-1为定值,由三角函数的性质知,当t^2确定时,b不确定,$\therefore b^2$,$\sin\frac{b}{2}$不确定,A,C不正确,$\because t^2-1$确定,$\therefore a^2+2a$确定,$\therefore$若t确定,则a^2+2a唯一确定,a^2+a不唯一确定,B正确,D不正确.故选B.

方法二:画出函数$y_1=|\sin b|$,$y_2=|a+1|$的图象,如图,观察函数图象知,当t确定时,对于函数$y_1=|\sin b|$,b不确定,b^2不唯一确定,$\sin\frac{b}{2}$不唯一确定,A,C不正确.当t确定时,函数$y_2=|a+1|$中a不唯一确定,但$|a+1|$唯一确定,故$a^2+2a=|a+1|^2-1$唯一确定,a^2+a不唯一确定,B正确,D不正确.故选B.





5. [答案] $(-\infty,0)\cup(0,1]$

[精析] 要使函数$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$有意义,需满足$\begin{cases}x\neq 0,\\1-x\geqslant 0,\end{cases}$解得$x\in(-\infty,0)\cup(0,1]$.

6. [答案] -3

[精析] 令$\frac{3}{x}+2=1$,得$x=-3$,所以$f^{-1}(1)=-3$.

7. **[答案]** $\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$

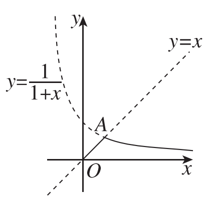
题眼 题目主要有2个条件:(1)$f(x)=f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$表示函数$f(x)$在$x$处的取值与其在$\dfrac{1}{x+1}$处的取值相同;(2)集合$\{y\mid y=f(x),x\in[0,a]\}$可取得$A$中所有值表示函数$f(x)$在$[0,a]$上的取值范围与它的值域相同.

[精析] 方法一 分拆定义域+转化问题

$D=[0,a]\cup[a,+\infty)$,$\because\{y\mid y=f(x),x\in[0,a]\}=A$,$\therefore\left\{y\,\middle|\,y=f\left(\dfrac{1}{1+x}\right),x\in[a,+\infty)\right\}\subseteq A$,又$f(x)=f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$,当$x\in[a,+\infty)$时,$\dfrac{1}{1+x}\in\left(0,\dfrac{1}{1+a}\right]$,$\therefore f(x)$在$[a,+\infty)$上的取值范围与$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{1+a}\right]$上的取值范围相同,$\therefore f(x)$在$[0,a]\cup\left(0,\dfrac{1}{1+a}\right]$上的取值范围与值域$A$相同,$\therefore a\geqslant\dfrac{1}{1+a}$,又$a>0$,解得$a\geqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore a$的取值范围为$\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$.

方法二 数形结合

$\because f(x)=f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$,$\{y\mid y=f(x),x\in[0,a]\}=A$,$\therefore$只需要$x,\dfrac{1}{1+x}$中有一个在$[0,a]$中即可,即$x\leqslant a$或$\dfrac{1}{1+x}\leqslant a$,$\therefore a\geqslant\min\left\{x,\dfrac{1}{1+x}\right\}$,设$h(x)=\min\left\{x,\dfrac{1}{1+x}\right\}$,$\therefore a\geqslant[h(x)]_{\max}$,作出$h(x)$的图象,如图中实线部分.由图象得$[h(x)]_{\max}$即为点$A$的纵坐标(点$A$为$h(x)$图象的最高点),



由$\begin{cases}y=x,\\y=\dfrac{1}{1+x},\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\\y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\end{cases}$$\therefore A\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$,$\therefore[h(x)]_{\max}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore a\in\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$.

8. **[答案]** D

[精析] 当$x>0$时,$x\operatorname{sgn}x=x=|x|$;

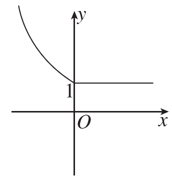
当$x=0$时,$x\operatorname{sgn}x=0=|x|$;

当$x<0$时,$x\operatorname{sgn}x=-x=|x|$.

综上,$|x|=x\operatorname{sgn}x$.故选D.

9. **[答案]** D

[精析] $f(x)$的图象如图所示.当$\begin{cases}x+1\leqslant0,\\2x\leqslant0,\end{cases}$即$x\leqslant-1$时,若满足$f(x+1)<f(2x)$,则满足$x+1>2x$,即$x<1$,此时$x\leqslant-1$;当$\begin{cases}x+1>0,\\2x<0,\end{cases}$即$-1<x<0$时,$f(x+1)<f(2x)$恒成立.综上,$x$的取值范围是$x<0$.故选D.



10. **[答案]** $\sqrt{3}$

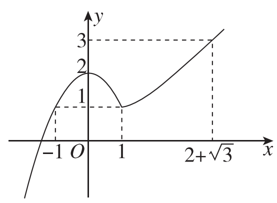
[精析] $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x>0,\\1,x\leqslant0,\end{cases}$则$f(3)=\sqrt{3}$.

11. **[答案]** 2

[精析] 因为$f(\sqrt{6})=6-4=2$,所以$f(f(\sqrt{6}))=f(2)=3$,即$|2-3|+a=3$,解得$a=2$.

12. **[答案]** $\dfrac{37}{28}$ $3+\sqrt{3}$

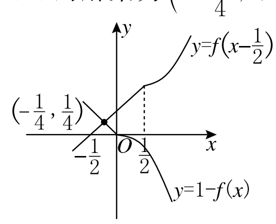
[精析] $f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=f\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{7}{4}+\dfrac{4}{7}-1=\dfrac{37}{28}$.当$f(x)=x+\dfrac{1}{x}-1=3$时,$x=2+\sqrt{3}$,作出$f(x)$的图象如图所示,由图可知,当$1\leqslant f(x)\leqslant3$时,$-1\leqslant a\leqslant1$,$b=2+\sqrt{3}$,则$b-a$的最大值为$3+\sqrt{3}$.



13. **[答案]** $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

[精析] 方法一 数形结合法

$\because f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant0,\\2^x,x>0,\end{cases}$ $\therefore f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2},x\leqslant\dfrac{1}{2},\\2^{x-\frac{1}{2}},x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$,即$f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1-f(x)$.画出$y=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$与$y=1-f(x)$的图象如图所示.由图可知,满足$f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1-f(x)$的解集为$\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.



方法二　分类讨论法

令 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)$，注意到 $x>x-\frac{1}{2}$，下面对 $x,x-\frac{1}{2}$ 与 0 的大小关系分三种情形讨论. 当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x+\frac{3}{2}$；当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2^x+x+\frac{1}{2}$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=(\sqrt{2}+2)2^{x-1}$. 所以 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}, x\leqslant 0,\\ 2^x+x+\frac{1}{2}, 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ (\sqrt{2}+2)\cdot 2^{x-1}, x>\frac{1}{2},\end{cases}$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$，$\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上均单调递增，且 $g\left(-\frac{1}{4}\right)=1$，$2^0+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>1$，$(\sqrt{2}+2)\times 2^{\frac{1}{2}-1}=1+\sqrt{2}>1$，所以满足 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

方法总结 解分段函数不等式的基本方法如下：
(1)分类讨论法：根据分段函数的定义域划分区间，对每个区间分别求解不等式，最后取并集.
(2)利用函数单调性：若函数在各段内单调，可通过单调性将不等式转化为关于 x 的简单不等式.
(3)数形结合法：画出分段函数的图象，通过观察图象的交点、增减性等直观求解不等式.

[命题追踪] 各地高考卷对于函数的定义域、值域直接考查较少，一般在题目中隐含考查函数的性质；全国卷对分段函数的考查一般是结合单调性解不等式问题，题目渗透分类讨论思想、数形结合思想.

考点5　函数的基本性质

1. **[答案]** C

[精析] 方法一：A，B 选项中的函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；C 选项中的函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；D 选项中的函数图象的对称轴为直线 $x=1$，该函数在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 故选 C.

方法二：对于 A，因为 $u=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=-u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 A 错误；对于 B，因为 $u=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=\frac{1}{u}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)=\frac{1}{2^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 B 错误；对于 C，因为 $u=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$y=-u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 正确；对于 D，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1$，$f(2)=3^{|2-1|}=3$，所以 $f(x)=3^{|x-1|}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调，故 D 错误. 故选 C.

2. **[答案]** D

[精析] 对于选项 A，函数 $f(x)=-x$ 在定义域上是减函数，不符合题意；对于选项 B，函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在定义域上为减函数，不符合题意；对于选项 C，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意；对于选项 D，函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在定义域上为增函数. 故选 D.

3. **[答案]** D

[精析] 因为 $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以根据复合函数的单调性可得 $u=x(x-a)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，故 $\frac{a}{2}\geqslant 1$，解得 $a\geqslant 2$，故选 D.

4. **[答案]** B

[精析] 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $-\frac{-2a}{-2}\geqslant 0$，且 $-a\leqslant e^0+\ln 1$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$，故选 B.

5. **[答案]** B

[精析] 方法一　放缩＋同构

由题知 $2^a+\log_2 a=4^b+\log_2 b=2^{2b}+\log_2(2b)-1<2^{2b}+\log_2(2b)$，又函数 $y=2^x+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $a<2b$，故选 B.

方法二　特殊法＋临界值

由选项 $a>2b$，$a<2b$，$a>b^2$，$a<b^2$ 可知，它们的临界状态就是 $a=2b$ 和 $a=b^2$.

令 $a=2b=2$，则 $a=2$，$b=1$，此时 $2^2+\log_2 2=5$，$4^1+2\log_4 1=4$，显然 $5>4$，且函数 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 是增函数，若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则 $a<$

$2b$，排除 A 选项；令 $a=b^2=4$，则 $a=4,b=2$，此时 $2^4+\log_2 4=4^2+2\log_4 4=18$，排除 C，D. 故选 B.

方法三　分类讨论法

$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$ 等价于 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$，$y=2^x$，$y=\log_2 x$ 都是单调函数，且 a,b 皆大于 0.

①若 $a<b$，则 $\log_2 a<\log_2 b$，要使得 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$ 成立，那么一定有 $2^a>2^{2b}$，即 $a>2b$，与 $a<b$ 相矛盾，不成立；②若 $a=b$，则 $\log_2 a=\log_2 b$，要使得 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$ 成立，那么一定有 $2^a=2^{2b}$，即 $a=2b$，与 a,b 皆大于 0 相矛盾，不成立；③若 $a>b$，则 $\log_2 a>\log_2 b$，要使得 $2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2 b$ 成立，那么一定有 $2^a<2^{2b}$，即 $a<2b$，符合题意. 综合①②③，结合四个选项，可以判断 $a<2b$ 成立. 故选 B.

6. 【答案】$[1,+\infty)$

【精析】当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=1$；当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x>1$. 所以函数 $f(x)$ 的值域是 $[1,+\infty)$.

7. 【答案】0(答案不唯一)　1

【精析】当 $a<0$ 时，$y=-ax+1$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，∴$f(x)$ 不存在最小值；当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1,x<0,\\(x-2)^2,x\geqslant 0,\end{cases}$ 此时 $f(x)$ 存在最小值 0；当 $0<a\leqslant 2$ 时，$f(x)=-ax+1(x<a)$ 的取值范围为 $(-a^2+1,+\infty)$，而 $f(x)=(x-2)^2(x\geqslant a)$ 的取值范围为 $[0,+\infty)$，若 $f(x)$ 存在最小值，则需满足 $-a^2+1\geqslant 0$，可得 $0<a\leqslant 1$；当 $a>2$ 时，$f(x)=-ax+1(x<a)$ 的取值范围为 $(-a^2+1,+\infty)$，而 $f(x)=(x-2)^2(x\geqslant a)$ 的取值范围为 $[(a-2)^2,+\infty)$，若 $f(x)$ 存在最小值，则需满足 $-a^2+1\geqslant(a-2)^2$，此不等式无解. 综上，实数 a 的取值范围是 $[0,1]$，故 a 的一个取值为 0(答案不唯一)，最大值为 1.

8. 【答案】B

【精析】方法一：由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. 令 $h(x)=\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，则 $h(-x)=\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=-h(x)$，所以 $h(x)$ 为奇函数. 令 $g(x)=x+a$，由 $f(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数，可得 $g(x)$ 为奇函数，所以 $a=0$，故选 B.

方法二：由题知函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(1)=f(-1)$，故 $(1+a)\ln\frac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$，解得 $a=0$，故选 B.

9. 【答案】B

【精析】对于 A，设 $f(x)=\frac{e^x-x^2}{x^2+1}$，则 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-1)=\frac{e^{-1}-1}{2}$，$f(1)=\frac{e-1}{2}$，即 $f(-1)\neq f(1)$，所以 $f(x)$ 不是偶函数，故 A 不符合题意；对于 B，设 $g(x)=\frac{\cos x+x^2}{x^2+1}$，则 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $g(-x)=\frac{\cos(-x)+(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{\cos x+x^2}{x^2+1}=g(x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数，故 B 符合题意；对于 C，设 $h(x)=\frac{e^x-x}{x+1}$，则 $h(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq -1\}$，不关于原点对称，所以 $h(x)$ 不是偶函数，故 C 不符合题意；对于 D，设 $\varphi(x)=\frac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $\varphi(1)=\frac{\sin 1+4}{e}$，$\varphi(-1)=\frac{-\sin 1-4}{e}$，即 $\varphi(1)\neq\varphi(-1)$，所以 $\varphi(x)$ 不是偶函数，故 D 不符合题意. 故选 B.

10. 【答案】C

【精析】方法一　通法

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-x)=\frac{1}{1+2^{-x}}=\frac{2^x}{1+2^x}$，所以 $f(-x)+f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{1}{1+2^x}=1$. 故选 C.

方法二　排除法

原函数为非奇非偶函数，故排除 A，B；令 $x=0$，则 $f(0)=\frac{1}{2}$，排除 D. 故选 C.

11. 【答案】B

【精析】方法一　图象平移

$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{x+1}-1$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,-1)$ 对称. 因为奇函数的图象关于原点 $(0,0)$ 对称，所以需要将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，故选 B.

方法二　奇函数的性质

对于 A，$f(x-1)=\frac{1-(x-1)}{1+x-1}=\frac{2-x}{x}=\frac{2}{x}-1$，故 $f(x-1)-1=\frac{2}{x}-2$ 不是奇函数，故 A 不正确；对于 B，$f(x-1)+1=\frac{2}{x}$ 是奇函数，故 B 正确；同理，$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+x+1}=\frac{-x}{2+x}$，显然 $f(x+1)-$

$1=-\frac{2(1+x)}{2+x}$，$f(x+1)+1=\frac{2}{2+x}$的图象均不关于原点对称，因此都不是奇函数，故C，D不正确．故选B．

知识本源 本题从数与形两个角度方法判断函数的奇偶性，其中方法一是从形的角度研究，即偶函数的图象关于y轴对称，奇函数的图象关于原点对称．方法二从数的角度研究，即若函数$f(x)$的定义域关于原点对称，则奇函数的代数特征是$f(-x)=-f(x)$，偶函数的代数特征是$f(-x)=f(x)$．

12. **［答案］** D

［精析］ 方法一　定义法

因为$f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$是偶函数，所以$f(x)-f(-x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}-\frac{(-x)e^{-x}}{e^{-ax}-1}=\frac{x[e^x-e^{(a-1)x}]}{e^{ax}-1}=0$，又因为$x$不恒为0，所以$e^x-e^{(a-1)x}=0$，即$e^x=e^{(a-1)x}$，则$x=(a-1)x$，即$1=a-1$，解得$a=2$．故选D．

方法二　特殊值法

因为$f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$是偶函数，所以$f(1)=f(-1)$，即$\frac{e}{e^a-1}=-\frac{e^{-1}}{e^{-a}-1}$，解得$a=2$，经检验符合题意．故选D．

方法三　奇偶函数性质法

由题设，可知$f(x)=x\cdot\frac{e^x}{e^{ax}-1}$，且$y=x$为奇函数，则$g(x)=\frac{e^x}{e^{ax}-1}$为奇函数，由$g(x)+g(-x)=0$，解得$a=2$．故选D．

方法总结 已知函数的奇偶性求参数取值这类问题的主要解法有定义法（恒等式法）、特殊值法以及奇偶函数性质法等．(1)定义法：从关于自变量的等式恒成立出发，建立以参数为未知数的方程（组），通过解方程（组）求参数，该解法的关键是寻找等式恒成立的条件；(2)特殊值法：通过选取合适的自变量的特殊值将问题具体化，从而简化运算；(3)奇偶函数性质法：注意奇偶函数定义域的对称性，利用奇偶函数性质构建恒等式，从而求解参数值．

13. **［答案］** 0

［精析］ 由题意，可得$f(0)=0+a=0$，解得$a=0$．当$a=0$时，$f(x)=x^3$，满足$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，即$f(x)$是奇函数，故$a=0$符合题意．

14. **［答案］** 2

［精析］ 方法一　偶函数的定义

因为$f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=x^2+(a-2)x+1+\cos x$为偶函数，其定义域为$\mathbf{R}$，所以$f(-x)=f(x)$恒成立，则$(-x)^2-(a-2)x+1+\cos(-x)=x^2+(a-2)x+1+\cos x$恒成立，可得$a=2$．

方法二　特殊值

由题易知$f(1)=a+\sin\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$，且$f(-1)=4-a+\sin\left(-1+\frac{\pi}{2}\right)$．由$f(1)=f(-1)$可得$a=4-a$，所以$a=2$．

方法三　奇偶函数的运算性质

由题知函数$f(x)=x^2+(a-2)x+1+\cos x$为偶函数，因为函数$y=\cos x$和$y=x^2+1$都是偶函数，所以$y=(a-2)x$是偶函数，所以$a=2$．

15. **［答案］** 1

［精析］ 方法一　定义法

因为函数$f(x)$为偶函数，所以对任意x，$f(-x)=f(x)$恒成立，即$(-x)^3(a\cdot2^{-x}-2^x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$恒成立，即$-(a\cdot2^{-x}-2^x)=a\cdot2^x-2^{-x}$恒成立，以$a$为基准合并同类项得$a(2^x+2^{-x})=2^x+2^{-x}$恒成立（此步很多学生被卡住，其实应该合并同类项），故$a=1$．

方法二　特值法

因为函数$f(x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$是偶函数，所以$f(1)=f(-1)$，即$2a-2^{-1}=-(a\cdot2^{-1}-2)$，合并同类项得$a(2+2^{-1})=2+2^{-1}$，解得$a=1$．

方法三　秒杀法

因为函数$y=x^3$是奇函数，所以若函数$f(x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$是偶函数，则函数$y=a\cdot2^x-2^{-x}$是奇函数．由$y=2^x-2^{-x}$是常见的奇函数，得$a=1$．

方法拓展 常见的奇偶函数：

常见的奇函数有：$y=a^x-a^{-x}$，$y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$，$y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$，$y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$，$y=\log_a\frac{x-b}{x+b}$，$y=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$，$y=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$，$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{a^x+1}$，$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{a^x-1}$，$y=x^{2n+1}(n\in\mathbf{N})$，$y=\sin x$，$y=\tan x$等．

常见的偶函数有：$y=a^x+a^{-x}$，$y=\log_a(b+x)+\log_a(b-x)$，$y=\log_a(a^x+1)-\frac{1}{2}x$，$y=\log_a(a^{2x}+1)-x$，$y=x^{2n}(n\in\mathbf{N})$，$y=\cos x$，$y=|\sin x|$等.

16. **[答案]** 1

[精析] ∵ 函数 $f(x)=\begin{cases}a^2x-1,x<0,\\x+a,x>0,\\0,x=0\end{cases}$ 为奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$，∴ $f(-1)=-f(1)$，∴ $-a^2-1=-(a+1)$，即 $a(a-1)=0$，解得 $a=0$ 或 $a=1$. 当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-1,x<0,\\0,x=0,\\x,x>0\end{cases}$ 不是奇函数，故 $a\neq0$；当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}x-1,x<0,\\0,x=0,\\x+1,x>0\end{cases}$ 是奇函数，故 $a=1$ 满足题意. 综上，$a=1$.

17. **[答案]** $-\frac{1}{2}$　$\ln 2$

[精析] 方法一　函数代数特征＋列方程组求解

因为 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$，$f(-x)=\ln\left|a+\frac{1}{1+x}\right|+b$，所以 $f(x)+f(-x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+\ln\left|a+\frac{1}{1+x}\right|+2b=\ln\left|\left(a+\frac{1}{1-x}\right)\left(a+\frac{1}{1+x}\right)\right|+2b=\ln\left|a^2+\frac{a}{1-x}+\frac{a}{1+x}+\frac{1}{1-x^2}\right|+2b=\ln\left|a^2+\frac{2a+1}{1-x^2}\right|+2b=0$，则 $a^2+\frac{2a+1}{1-x^2}=e^{-2b}$ 恒成立，则 $\begin{cases}2a+1=0,\\a^2=e^{-2b},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\ln 2.\end{cases}$

方法二　函数定义域对称性＋方程

$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$ 是奇函数，注意到 $x=1$ 不在定义域中，由奇函数定义域的对称性知 $x\neq-1$，即 $a+\frac{1}{1-(-1)}=0$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，再由 $f(0)=\ln|a+1|+b=0$ 得 $b=\ln 2$.

考情分析 “多想少算”是高考数学命题的重要理念. 通过多联想、多观察、多思考可以减少或避免繁杂的运算. 上题中的方法二能很好的体现此点.

［命题追踪］全国卷对于函数单调性和奇偶性的单独考查一般难度不大，重点考查其基本概念. 通过选题可以看出，考查的函数以幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等为载体，通过四则运算构造、分段构造、复合构造、指对数运算等居多. 在研究过程中，可以从数形两方面研究函数的单调性和奇偶性.

18. **[答案]** A

[精析] $y=-3x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减且为奇函数，A 符合题意；$y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，B 不符合题意；$y=\log_3 x$，$y=3^x$ 为非奇非偶函数，C，D 不符合题意. 故选 A.

19. **[答案]** A

[精析] 方法一　求解析式求值

当 $x\in[1,2)$时，$4-x\in(2,3]$，因为 $f(x)$是周期为 2 的偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=f(4-x)=5-2(4-x)=2x-3$，故当 $1\leqslant x<2$ 时，$f(x)=2x-3$，所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=2\times\frac{5}{4}-3=-\frac{1}{2}$.

方法二　利用周期性和对称性将 x 转化到已知函数解析式区间

因为 $f(x)$是偶函数，所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)$，因为 $f(x)$是周期为 2 的周期函数，所以 $f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(2+\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)$. 由题可得 $f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$，故 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

方法三　利用周期性和奇偶性转化为对称性求值

由题知 $f(-x)=f(x)$，$f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x+2)=f(-x)$，所以 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 $f(x)=f(2-x)$，将 $x=-\frac{3}{4}$代入得，$f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

方法拓展 设 $f(x)$的周期为 T，对 $f(x)$的定义域内任一自变量的值 x，有如下结论：

(1) 若 $f(x+a)=-f(x)(a\neq0)$，则 $T=2|a|$；

(2) 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(a\neq0)$，则 $T=2|a|$；

(3) 若 $f(x+a)=f(x+b)(a\neq b)$，则 $T=|a-b|$.

20. 【答案】A

> **题眼** 函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，只需考查 $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}$ 与对称轴 $x=1$ 的距离，结合函数 $f(x)$ 的单调性即可求解.

【精析】由题得 $f'(x)=e^{-(x-1)^2}(-2x+2)$. 令 $f'(x)=0$，则 $x=1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又 $f(2-x)=e^{-(2-x-1)^2}=e^{-(1-x)^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$，又 $1>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4-\sqrt{6}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)>f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $b>c>a$. 故选 A.

21. 【答案】C

【精析】由已知有 $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(1+\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-f\left(\frac{2}{3}\right)=-f\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=-f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

22. 【答案】B

【精析】方法一　常规推导

$\because f(x+2)$ 是偶函数，$\therefore f(-x+2)=f(x+2)$. $\because f(2x+1)$ 是奇函数，$\therefore f(-2x+1)=-f(2x+1)$. 由 $F(x)=f(2x+1)$ 是奇函数，可得 $F(0)=f(1)=0$，$\therefore f(-1)=-f(3)=-f(1)=0$，其他几个选项不一定成立，故选 B.

方法二　特殊函数秒杀

由 $f(x+2)$ 是偶函数，$f(2x+1)$ 是奇函数，可取 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\pi\right)$，可得 $f(-1)=0$，其他几个选项均不成立，故选 B.

23. 【答案】A

【精析】方法一　常规推导

令 $x=1,y=0$，得 $2f(1)=f(1)f(0)$，所以 $f(0)=2$. 令 $y=1$，得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)$，所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$，即 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，所以 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x-1)$，即 $f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x)=-f(x+3)=f(x+6)$，即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数. 因为 $f(0)=2,f(1)=1,f(2)=f(1)-f(0)=-1$，$f(3)=-f(0)=-2,f(4)=-f(1)=-1$，$f(5)=-f(2)=1,f(6)=f(0)=2$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=[f(1)+f(2)+\cdots+f(18)]+[f(19)+f(20)+f(21)+f(22)]=f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$.

方法二　特殊函数

因为 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y),f(1)=1$，且由方法一知 $f(x)$ 的周期为 6，所以取特殊函数 $f(x)=2\cos\frac{\pi x}{3}$. 因为 $f(2)=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$，$f(3)=2\cos\pi=-2,f(4)=2\cos\frac{4\pi}{3}=-1$，$f(5)=2\cos\frac{5\pi}{3}=1,f(6)=f(0)=2$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=3[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=3\times(1-1-2-1+1+2)+1-1-2-1=-3$. 故选 A.

> **方法拓展** 对称性与周期性之间有紧密的联系，解决此类问题除了常规的逻辑推导之外，类比三角函数，很容易得到对称性与周期性的关系.
>
> 1. 关于函数图象的对称中心或对称轴的常用结论：
>
> (1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；
>
> (2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；
>
> (3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=-f(b-x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ 对称；
>
> (4) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 对称.
>
> 2. 对称性与周期性之间的常用结论：
>
> (1) 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称，则函数 $f(x)$ 的周期 $T=2|b-a|$；
>
> (2) 若函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 的周期 $T=2|b-a|$；
>
> (3) 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 的周期 $T=4|b-a|$.

24. 【答案】D

【精析】由 $f(x+1)$ 是奇函数，知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，则 $f(1)=a+b=0$，$f(0)=-f(2)$. 由 $f(x+2)$ 是偶函数，知函数 $f(x)$ 的图

象关于直线 $x=2$ 对称，则 $f(3)=f(1)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由 $f(0)+f(3)=-f(2)+f(1)=-4a-b+a+b=6$，解得 $a=-2$，所以 $b=2$，$f(x)=-2x^2+2$，故 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left[-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\right]=\frac{5}{2}$.

25. **[答案]** D

[精析] 方法一　常规推导 分析得到函数 $g(x)$ 的性质，得到函数值

由 $f(x)+g(2-x)=5$ 得 $f(x)=5-g(2-x)$①. 由 $g(x)-f(x-4)=7$ 得 $f(x-4)=g(x)-7$，所以 $f(x)=g(x+4)-7$②. 由①②得 $5-g(2-x)=g(x+4)-7$，即 $g(x+4)+g(2-x)=12$，所以 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(3,6)$ 对称，$g(3)=6$，又 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以函数 $g(x)$ 是周期为 4 的函数，且 $g(1)=g(3)=6$，$f(x)=g(x)-7$. 因为 $g(4)+g(2)=12$，所以 $g(4)=12-g(2)=12-4=8$，所以 $f(1)=g(1)-7=-1$，$f(2)=g(2)-7=-3$，$f(3)=g(3)-7=-1$，$f(4)=g(4)-7=1$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(22)=5\times(-4)+(-1)+(-3)=-24$. 故选 D.

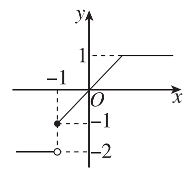
方法二　常规推导　分析得到函数 $f(x)$ 的性质，进而得到函数值

因为 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $g(2-x)=g(2+x)$. 由 $f(x)+g(2-x)=5$，得 $f(-x)+g(2+x)=5$，所以 $f(-x)=f(x)$. 因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(2-x)=f(-x-2)+7=f(x+2)+7$. 由 $f(x)+g(2-x)=5$，得 $f(x)+f(x+2)=-2$，所以 $f(x+4)=-2-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $f(x)+f(x+2)=-2$，得 $2f(1)=f(-1)+f(1)=-2$，故 $f(1)=-1$. 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $g(x)-f(x-4)=7$ 及 $g(2)=4$，得 $g(2)-f(-2)=4-f(2)=7$，故 $f(2)=-3$. 由 $f(-x)=f(x)$ 和 $f(x)+f(x+2)=-2$，得 $f(1)+f(3)=-2$，故 $f(3)=-1$. 由 $f(x)+g(2-x)=5$，得 $f(0)=5-g(2)=1$，故 $f(4)=1$. 于是 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=5\times(-1-3-1+1)-1-3=-24$. 故选 D.

方法三　构造特殊函数

构造函数 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x-1$，$g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x+6$，显然，$y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$. 直接计算得 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=-24$. 故选 D.

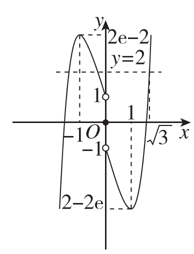
26. **[答案]** B



[精析] 对于 A，当 $x<x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$，当 $x_0=1$ 时，$x_0\in[-1,1]$，对于任意 $x\in(-\infty,1)$，$f(x)<f(1)$ 恒成立，若 $f(x)$ 是偶函数，此时 $f(1)=f(-1)$，矛盾，故 A 错误；对于 B，若 $f(x)$ 的图象如图，当 $x<-1$ 时，$f(x)=-2$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\in[-1,1]$，当 $x>1$ 时，$f(x)=1$，所以存在 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值，故 B 正确；对于 C，若函数 $f(x)$ 严格递增，则集合 M 不会是 $[-1,1]$，而是全体定义域，故 C 错误；对于 D，若存在 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到极小值，则存在 $n<-1$，使得 $f(n)>f(-1)$，与集合 M 的定义矛盾，故 D 错误. 故选 B.

27. **[答案]** ABD

[精析] 对于 A 项，因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，A 正确. 对于 B 项，当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=[(-x)^2-3]e^{-x}+2=(x^2-3)e^{-x}+2$，所以 $f(x)=-f(-x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$，故 $f(x)=\begin{cases}-(x^2-3)e^{-x}-2,x<0,\\0,x=0,\\(x^2-3)e^x+2,x>0,\end{cases}$ B 正确. 对于 C 项，方法一：当 $x<0$ 时，若 $f(x)\geqslant 2$，则 $-(x^2-3)e^{-x}-2\geqslant 2$，即 $(x^2-3)e^{-x}+4\leqslant 0$，设 $g(x)=(x^2-3)e^{-x}+4$，则 $g'(x)=(3-x)(x+1)e^{-x}$，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，且 $g(-\sqrt{3})=4>0$，$g(-1)=-2e+4<0$，$g(0)=1>0$，故存在 $x<0$，使得 $g(x)\leqslant 0$ 成立；当 $x>0$ 时，若 $f(x)\geqslant 2$，即 $(x^2-3)e^x+2\geqslant 2$，则 $x\geqslant\sqrt{3}$，故 C 错误.



方法二：当 $x>0$ 时，$f'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x-1)(x+3)e^x$，易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=2-2e<0$，$f(\sqrt{3})=2>0$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，由奇函数定义可得 $f(x)$ 的图象如图所示，由图可知 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，且 $f(-1)=2e-2>2$，故 C 错误.

对于 D 项，当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则 $f'(x)=(x+3)(x-1)e^x$，$f'(1)=0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，

即$(a+1)\ln 2=(a-2)\ln\frac{1}{2}$,则$a+1=2-a$,解得

$a=\frac{1}{2}$. (6分)

经检验$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$满足题意,

故存在a,b满足题意,且$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$. (7分)

(3)由函数$f(x)$的解析式可得$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{x+1}$,

令$\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{x+1}=0$,

则$-(x+1)\ln(x+1)+(x+ax^2)=0$,

令$g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)(x>0)$,

则$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在极值点等价于$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在变号零点,

$g'(x)=2ax-\ln(x+1)$,令$s(x)=g'(x)$,

则$s'(x)=2a-\frac{1}{x+1}$, (8分)

①当$a\leqslant 0$时,由$x>0$,得$g'(x)<0$,则$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减,

此时$g(x)<g(0)=0$,$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上无零点,不符合题意. (9分)

②当$2a\geqslant 1$,即$a\geqslant\frac{1}{2}$时,由$x>0$,得$\frac{1}{x+1}<1$,所以当$x>0$时,$s'(x)>0$,$g'(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增,

所以$g'(x)>g'(0)=0$,$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增,$g(x)>g(0)=0$,所以$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上无零点,不符合题意. (10分)

③当$0<a<\frac{1}{2}$时,由$s'(x)=2a-\frac{1}{x+1}=0$可得$x=\frac{1}{2a}-1$,

当$x\in\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$时,$s'(x)<0$,$g'(x)$单调递减,

当$x\in\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$时,$s'(x)>0$,$g'(x)$单调递增,

故当$x>0$时,$g'(x)$的最小值为$g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln(2a)$, (11分)

令$m(x)=1-x+\ln x(0<x<1)$,则$m'(x)=\frac{-x+1}{x}>0$,

函数$m(x)$在$(0,1)$上单调递增,$m(x)<m(1)=0$,据此可得$1-x+\ln x<0$对$x\in(0,1)$恒成立,

则$g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln(2a)<0$,

又$g'(0)=0$,当$x\to+\infty$时,$s'(x)\to 2a$,$g'(x)\to+\infty$,

所以$g'(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一零点x_0.

当$x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

当$x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

所以$g(x_0)<g(0)=0$.

又当$x\to+\infty$时,$g'(x)\to+\infty$,$g(x)\to+\infty$,

所以函数$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在变号零点,符合题意.

综上可知,实数a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. (12分)

[命题追踪] 函数零点是刻画函数图象与性质的重要特征,函数零点问题能够充分考查学生的转化与化归思想、分类讨论思想、函数与方程思想、数形结合思想以及逻辑推理能力.全国卷小题对函数零点考查频率较少,解答题考查较多,有直接考查(如第8题),也有转化后考查(如第9题).

专题一 利用导数研究恒成立、能成立求参问题

1. **精解**:(1)由已知,$f(x)=ax-xe^x$,得$f'(x)=a-e^x(x+1)$,则$f(0)=0$,$f'(0)=a-1$, (2分)

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-0=(a-1)(x-0)$,即$y=(a-1)x$. (3分)

(2)证明:设$g(x)=f'(x)$,则$g'(x)=-e^x(x+2)$,令$g'(x)=0$,则$x=-2$.

当$x\in(-\infty,-2)$时,$g'(x)>0$,当$x\in(-2,+\infty)$时,$g'(x)<0$,

所以$g(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增,在$(-2,+\infty)$上单调递减. (4分)

①当$x\in(-\infty,-1]$时,$f'(x)=a-e^x(x+1)>0$,

所以$f(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递增,

故$f(x)$在$(-\infty,-1]$上没有极值点. (5分)

②当$x\in(-1,+\infty)$时,$f'(-1)=a>0$,$f'(a)=a(1-e^a)-e^a<a(1-e^0)-e^a=-e^a<0$,

又$g(x)=f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减, (6分)

故存在唯一实数$x_0\in(-1,a)$,使得$f'(x_0)=0$. (7分)

因此当$x\in(-1,x_0)$时,$f'(x)>f'(x_0)=0$,

当$x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)<f'(x_0)=0$,

所以$f(x)$在$(-1,x_0)$上单调递增,在$(x_0,+\infty)$上单调递减, (8分)

故x_0是$f(x)$的极大值点,$f(x)$无极小值点. (8分)

综上，$f(x)$有且仅有一个极值点. （9分）

(3)由 $f(x)\leqslant a+b$，得 $b\geqslant a(x-1)-xe^x$. （10分）

设 $h(x)=a(x-1)-xe^x$，则 $h'(x)=a-(x+1)e^x$，此时 $h'(x)=f'(x)$，

由(2)知，存在唯一实数 $x_0\in(-1,a)$，使得 $f'(x_0)=0$， （11分）

即 $h'(x_0)=0$，则 $a=(x_0+1)e^{x_0}$，$x_0\in(-1,a)$.

因为 x_0 是 $f(x)$的唯一极大值点，所以 x_0 是 $h(x)$的唯一极大值点，故 $h(x)_{\max}=h(x_0)=a(x_0-1)-x_0e^{x_0}=(x_0^2-x_0-1)e^{x_0}$. （12分）

设 $\varphi(x)=(x^2-x-1)e^x$，则 $\varphi'(x)=(x+2)(x-1)e^x$，$x\in(-1,a)$. （13分）

①当 $0<a\leqslant 1$ 时，$\varphi'(x)=(x+2)(x-1)e^x<0$，

所以 $\varphi(x)$在$(-1,a)$上单调递减，

又 $\varphi(a)=(a^2-a-1)e^a$ 在$(0,1]$上单调递减，

所以 $\varphi(x)>\varphi(a)\geqslant\varphi(1)=-e$，

故 $h(x_0)>-e$，从而 $b>-e$. （14分）

②当 $a>1$ 时，令 $\varphi'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $x\in(-1,1)$时，$\varphi'(x)<0$；

当 $x\in(1,a)$时，$\varphi'(x)>0$，

所以 $\varphi(x)$在$(-1,1)$上单调递减，在$(1,a)$上单调递增，故 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=-e$， （15分）

故 $h(x_0)\geqslant -e$，从而 $b\geqslant -e$.

综上，b 的取值范围为$[-e,+\infty)$. （16分）

方法点拨 对于恒成立问题，有一个常见技巧：在定义域上取一个值，可以缩小参数的范围. 如果本题中，取 $x=1$，则由 $a(x-1)-xe^x-b\leqslant 0$，得 $-e-b\leqslant 0$，解得 $b\geqslant -e$，此时 b 的取值范围恰好为本题答案，注意这是一个巧合.

2. **精解**：(1)当 $a=-2$ 时，$f(x)=(1+2x)\ln(x+1)-x(x>-1)$， （1分）

则 $f'(x)=2\ln(x+1)+\dfrac{1+2x}{1+x}-1=2\ln(x+1)-\dfrac{1}{x+1}+1$， （2分）

又易知 $f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，而 $f'(0)=0$，

∴$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增， （4分）

故 $f(x)$在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$，$f(x)$无极大值. （5分）

(2)方法一　端点效应+分类讨论

由题知，$f'(x)=-a\ln(x+1)+\dfrac{1-ax}{x+1}-1$， （6分）

令 $g(x)=-a\ln(x+1)+\dfrac{1-ax}{x+1}-1$，

则 $g'(x)=\dfrac{-a}{x+1}+\dfrac{-a(x+1)-(1-ax)}{(x+1)^2}=\dfrac{-a(x+1)-a-1}{(x+1)^2}$，

令 $g'(0)=0$，则 $a=-\dfrac{1}{2}$. （7分）

①当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，$x\geqslant 0$ 时，$-a(x+1)-a-1\geqslant -a-a-1=-2a-1\geqslant 0$，

∴$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，又 $g(0)=0$，

从而 $f'(x)\geqslant 0$ 在$[0,+\infty)$上恒成立，∴$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

而 $f(0)=0$，∴当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，故当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，满足题意； （8分）

②当 $a\geqslant 0$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，

∴$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，

∴当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，即 $f'(x)\leqslant 0$ 在$[0,+\infty)$上恒成立，∴当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant f(0)=0$，不满足题意； （9分）

③当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=-2-\dfrac{1}{a}>0$，则 $g(x)$在 $\left[0,-2-\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减，在 $\left(-2-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，

又 $f'(0)=0$，∴当 $0<x<-2-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$，$f(x)$单调递减，

而 $f(0)=0$，∴$f(x)\geqslant 0$ 不恒成立，不满足题意. （11分）

综上可得 a 的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$. （12分）

方法二　巧妙变形+分类讨论+数形结合

以下考虑当 $x>0$ 时的情况：

由题知当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=(1-ax)\ln(x+1)-x\geqslant 0$，显然，当 $x=0$ 时不等式成立. （6分）

将$(1-ax)\ln(x+1)-x\geqslant 0$ 变形为 $1-ax\geqslant\dfrac{x}{\ln(x+1)}$，令 $m(x)=\dfrac{x}{\ln(x+1)}(x>0)$，

则 $m'(x)=\dfrac{\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}$，

令 $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}>0$， （8分）

∴$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，∴$h(x)>h(0)=0$，从而 $m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，当 $x\to+\infty$

时，$m(x)\to+\infty$.

当 $a\geqslant0$ 时，数形结合可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$1-ax\geqslant\dfrac{x}{\ln(x+1)}$ 不恒成立，不满足题意. (9 分)

当 $a<0$ 时，将不等式变形为 $\ln(x+1)\geqslant\dfrac{x}{1-ax}$（此时 $1-ax>0$），

令 $n(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{ax-1}(x>0)$，

则 $n'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(ax-1)^2}=\dfrac{a^2x^2-(2a+1)x}{(x+1)(ax-1)^2}=\dfrac{x[a^2x-(2a+1)]}{(x+1)(ax-1)^2}$，当 $\dfrac{2a+1}{a^2}\leqslant0$，即 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，

$n'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

此时 $n(x)>n(0)=0$，满足题意； (10 分)

当 $\dfrac{2a+1}{a^2}>0$，即 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2a+1}{a^2}\right)$ 上单调递减，

在 $\left(\dfrac{2a+1}{a^2},+\infty\right)$ 上单调递增，而 $n(0)=0$，

$\therefore n(x)\geqslant0$ 不恒成立，故不满足题意. (11 分)

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$. (12 分)

方法拓展 端点效应

端点效应在处理区间恒成立问题时比较套路化，基本对策就是先必要后充分的思想. 该思想就是当参变分离较为困难、带参讨论分界点不明时，含参不等式问题还可以采用先必要、后充分的做法，即先抓住一些关键点（如区间端点，可使不等式部分等于零的特殊值等），将关键点代入不等式解出参数的范围，获得结论成立的必要条件，再论证充分性，从而解决问题.

(1)如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，则 $f(a)\geqslant0$ 或 $f(b)\geqslant0$；

(2)如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，且 $f(a)=0$（或 $f(b)=0$），则 $f'(a)\geqslant0$（或 $f'(b)\leqslant0$）；

(3)如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，且 $f(a)=0$，$f'(a)=0$（或 $f(b)=0$，$f'(b)=0$），则 $f''(a)\geqslant0$（或 $f''(b)\leqslant0$，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数）.

另外，端点效应也存在失效的情况，特别是存在三角函数的恒成立问题时经常会失效！

［命题追踪］函数在区间恒成立探索参数的取值范围，一般分类讨论求最值，此类题目一般难度不大；对于考查区间端点和极值的关系，可以利用端点效应解决.

专题二　导数与不等式

1. **精解：**(1)由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=ae^x-1$. (1 分)

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数； (2 分)

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>-\ln a$，

令 $f'(x)<0$，得 $x<-\ln a$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增. (3 分)

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增. (4 分)

(2)证明：方法一　构造差函数

由(1)知，当 $a>0$ 时，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$， (6 分)

令 $g(a)=1+a^2+\ln a-\left(2\ln a+\dfrac{3}{2}\right)=a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}(a>0)$，则 $g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}(a>0)$. (7 分)

令 $g'(a)>0$，得 $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

令 $g'(a)<0$，得 $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $g(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增， (9 分)

故 $g(a)\geqslant g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}>0$， (10 分)

即 $f(x)_{\min}>2\ln a+\dfrac{3}{2}$， (11 分)

所以 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，故得证. (12 分)

方法二　放缩法

当 $a>0$ 时，由(1)得 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1+a^2+\ln a$， (6 分)

要证 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，只需证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\dfrac{3}{2}$， (7 分)

即证 $a^2-\dfrac{1}{2}>\ln a$，易证 $\ln a\leqslant a-1$， (9 分)

所以只需证明 $a^2-\frac{1}{2}>a-1$,即证 $a^2-a+\frac{1}{2}>0$.
(10 分)

因为 $a^2-a+\frac{1}{2}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$ 恒成立,所以

$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$成立,故得证. (12 分)

2. **精解:**(1)令 $F(x)=xf(x)$,则 $F'(x)=[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)$, (1 分)
由题知 $F'(0)=f(0)=\ln a=0$,所以 $a=1$. (2 分)

当 $a=1$ 时,$F'(x)=\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}+1$,

则 $F'(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减. (3 分)
可知当 $x<0$ 时,$F'(x)>0$,
当 $0<x<1$ 时,$F'(x)<0$,则 $F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$(0,1)$上单调递减. (4 分)
所以 $x=0$ 是函数 $F(x)$的极值点,则 $a=1$ 符合题意. (5 分)

(2)证明:由 $g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$,得 $x\neq 0$,

由 $f(x)=\ln(1-x)$,得 $x<1$. (6 分)
当 $0<x<1$ 时,$f(x)=\ln(1-x)<0$,$xf(x)<0$;
当 $x<0$ 时,$f(x)=\ln(1-x)>0$,$xf(x)<0$.
(7 分)

故要证$\frac{x+f(x)}{xf(x)}<1$,只需证 $x+f(x)>xf(x)$,

即证 $x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)>0$.
令 $1-x=t(t>0$ 且 $t\neq 1)$,则 $x=1-t$,即证 $1-t+\ln t-(1-t)\ln t>0$. (8 分)
设 $h(x)=1-x+\ln x-(1-x)\ln x$,$x>0$,

则 $h'(x)=-1+\frac{1}{x}-\left[(-1)\cdot\ln x+\frac{1-x}{x}\right]=$

$-1+\frac{1}{x}+\ln x-\frac{1-x}{x}=\ln x$, (10 分)
所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,故 $h(x)\geqslant h(1)=0$. (11 分)
因为 $t>0$ 且 $t\neq 1$,所以 $h(t)>h(1)=0$.
原命题得证. (12 分)

3. **精解:**(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=xe^x-e^x=(x-1)e^x$,
$f'(x)=xe^x$. (1 分)
当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;
当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.
(3 分)

(2)令 $g(x)=f(x)+1=xe^{ax}-e^x+1$,则 $g(0)=0$,由题意知 $g(x)<0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立.
$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x$,则 $g'(0)=0$. (4 分)
令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=ae^{ax}+a(e^{ax}+axe^{ax})-e^x=a(2e^{ax}+axe^{ax})-e^x$,
故 $h'(0)=2a-1$.

若 $h'(0)=2a-1>0$,即 $a>\frac{1}{2}$,

则 $h'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)}{x}>0$,

所以 $\exists x_0>0$,使得当 $x\in(0,x_0)$时,有$\frac{g'(x)}{x}>0$,

则 $g'(x)>0$,故 $g(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,
则 $g(x_0)>g(0)=0$,不合题意. (5 分)

若 $h'(0)=2a-1\leqslant 0$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$,

则当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,
故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,则当 $x>0$ 时,$g(x)<g(0)=0$,符合题意. (6 分)

当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x\leqslant e^{\frac{1}{2}x+\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}-e^x<e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}-e^x=0$
在$(0,+\infty)$上恒成立,故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,则当 $x>0$ 时,$g(x)<g(0)=0$,符合题意.

故实数 a 的取值范围是 $a\leqslant\frac{1}{2}$. (7 分)

(3)证明:$\ln(n+1)=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$, (8 分)

要证$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$,

只需证$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\frac{n+1}{n}$,

即证$\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

即证$\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>2\ln\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, (9 分)

设 $t=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$,则 $\frac{1}{n}=t^2-1$,$t>1$,即证$\frac{t^2-1}{t}>2\ln t(t>1)$,即证 $t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$. (10 分)

设 $m(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$,

则 $m'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$,

故 $m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则当 $x>1$ 时,